LIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
PRUEBA DE SELECCIÓN
PRIMER DÍA (09/05/13)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. Dos jugadores, *A* y *B* colorean, por turnos, una casilla aun no coloreada de un tablero de $2n \times 2n$, utilizando, respectivamente, azul y rojo. Comienza *A*, y su objetivo es obtener un cuadrado de 2×2 pintado de azul. El objetivo de *B* es impedírselo. Determinar cuál de los dos jugadores puede ganar, no importa lo bien que juegue su adversario, y describir una estrategia ganadora.

2. Sea la función que a cada número entero positivo le asigna un número entero positivo, tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{para } x \text{ impar} \\ \dfrac{x}{2} & \text{para } x \text{ par.} \end{cases}$$

Denotamos $f^1 = f$ e, inductivamente, $f^{k+1} = f \circ f^k$, es decir, $f^k(x) = \underbrace{f(\ldots(f}_{k \text{ veces}}(x)\ldots)$.

Demostrar que existe (al menos) un número entero positivo *x* tal que $f^{40}(x) > 2013x$.

3. Sea *ABCD* un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y tal que sus diagonales *AC* y *BD* se cortan en *S*. Sea *k* una circunferencia que pasa por *S* y por *D* y que corta a los lados *AD* y *CD* en *M* y *N*, respectivamente. Sea *P* la intersección de las rectas *SM* y *AB*, y *R* la intersección de las rectas *SN* y *BC* de modo que *P* y *R* están en el mismo semiplano determinado por *BD* que el punto *A*. Demostrar que la recta por *D* paralela a *AC* y la recta por *S* paralela a *PR* se cortan en la circunferencia *k*.

LIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
PRUEBA DE SELECCIÓN
SEGUNDO DÍA (10/05/12)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Hallar el menor entero positivo *n* tal que existen *n* números reales, no necesariamente distintos, en el intervalo $(-1,1)$ tales que su suma es igual a cero y la suma de sus cuadrados es igual a 20.

ACLARACIÓN: El intervalo $(-1,1)$ es el conjunto de los números reales mayores que – 1 y menores que 1.

5. Hallar todos los enteros positivos *n* y los números primos $p \geq 5$ tales que

$$(2p)^n + 1$$

es un cubo perfecto.

6. Se tiene un tablero cuadriculado de $n \times n$. Inicialmente sus casillas están coloreadas de blanco y negro, como el tablero de ajedrez, de modo que al menos una casilla de una esquina sea negra. En una movida se puede cambiar el color de las cuatro casillas de un cuadrado de 2×2 de acuerdo con la siguiente regla: cada casilla blanca se colorea de negro, cada casilla negra se colorea de verde y cada casilla verde se colorea de blanco. Hallar todos los posibles valores de *n* tales que, mediante algún número de movidas, es posible obtener el tablero de $n \times n$ coloreado de blanco y negro, pero con los colores inversos del tablero original.